I - Convertisseur numérique – analogique

I.1 - Travail préliminaire

1) La résistance équivalente vaut :

$$R_{eq} = R + 2R \parallel 2R = R + \frac{1}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{2R}} = R + R = \boxed{2R}$$

2) On combine les deux résistances $2R$ en dérivation (de résistance équivalente R) puis on applique le pond diviseur de tension :

$$U = \frac{R}{R+R}\, V_{ref} = \boxed{\frac{V_{ref}}{2}}$$

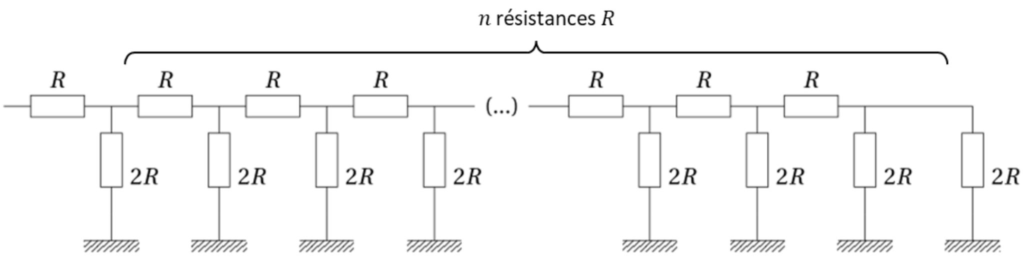
Par symétrie, chaque résistance $2R$ est parcourue par le même courant i. La résistance R est donc parcourue par un courant $2i$. La loi des mailles donne :

$$V_{ref} = R \times 2i + 2R \times i = 4Ri \quad \Rightarrow \quad \boxed{i = \frac{V_{ref}}{4R}}$$

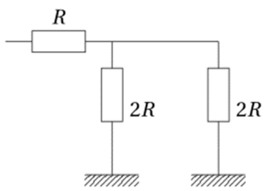
3) Montrons par récurrence que la résistance équivalente du circuit possédant n résistances R sur la branche du dessus vaut $2R$.

<u>Initialisation</u> : cas où $n = 1$. On sait que $R_{eq} = 2R$ d'après la question 1.

<u>Transitivité</u> : on suppose le cas n vrai et montrons que le cas $n + 1$ est toujours vrai.



Par hypothèse, ce montage est équivalent à au montage ci-dessous :

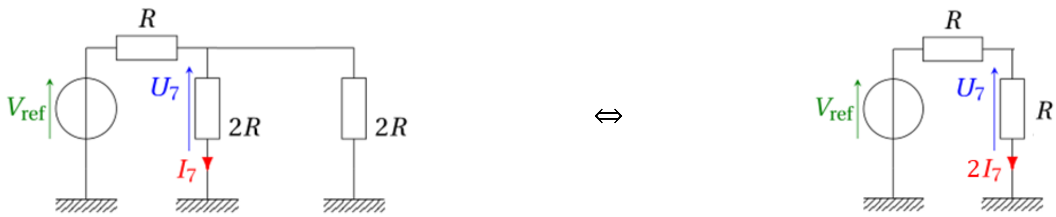


Ce dernier, d'après la question 1, est bien équivalent à une résistance $2R$.

<u>Conclusion</u> : le montage est, quel que soit sa taille, équivalent à une résistance $2R$.

I.2 - Étude du circuit de base du convertisseur

4) D'après ce qui précède, le montage est équivalent à :



D'après ce qui précède :

$$\boxed{U_7 = \frac{V_{ref}}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{i = \frac{V_{ref}}{4R}}$$

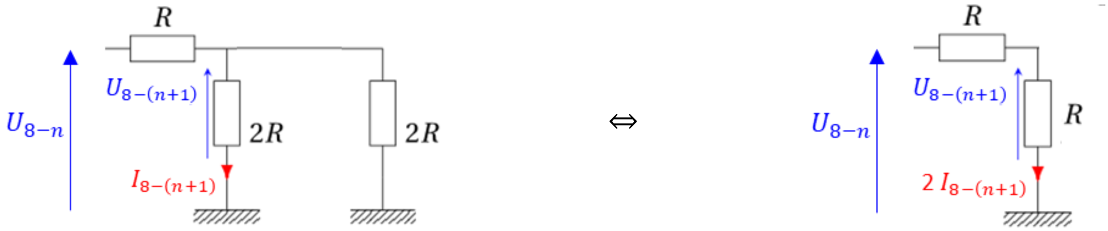
5) Montrons par récurrence que, pour $n \in [\![0\,,8]\!]$:

$$\boxed{U_{8-n} = \frac{V_{ref}}{2^n}} \quad \text{et} \quad \boxed{i_{8-n} = \frac{V_{ref}}{2^n \times 2R}}$$

<u>Initialisation</u> : cas où $n = 1$ qui vient d'être fait.

<u>Transitivité</u> :

Le montage est équivalent à :



Avec le même raisonnement qu'à la question 20 :

$$U_{8-(n+1)} = \frac{U_{8-n}}{2} = \frac{V_{ref}}{2^n \times 2} = \boxed{\frac{V_{ref}}{2^{n+1}}} \quad \text{et} \quad i_{8-(n+1)} = \frac{U_{8-n}}{4R} = \frac{V_{ref}}{2^n \times 4R} = \boxed{\frac{V_{ref}}{2^{n+1} \times 2R}}$$

CQFD

Il suffit maintenant d'effectuer un changement d'indice pour répondre à la question posée. Posons : $k = 8 - n \Rightarrow n = 8 - k$. On obtient :

$$\boxed{U_k = \frac{V_{ref}}{2^{8-k}}} \quad \text{et} \quad \boxed{i_k = \frac{V_{ref}}{2^{8-k} \times 2R}}$$

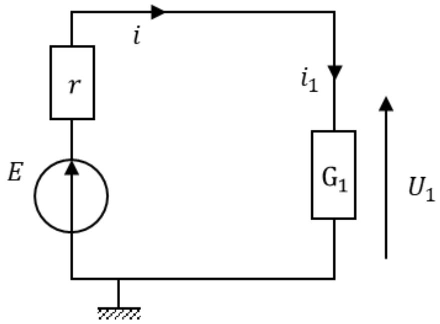
-- Fin de la partie I --

II - Guirlandes électriques

II.1 - Système de base

6) L'intensité $i_{2,o}$ à travers D_2 est nulle. On en déduit : $\boxed{\mathcal{P}_{2,o} = 0}$.

7) Le circuit est équivalent à :



La loi des mailles donne :

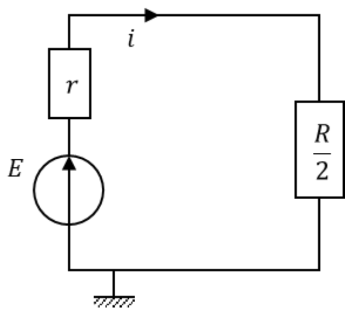
$$E = i_0(r + R) \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_0 = \frac{E}{r + R}}$$

D'après la loi d'Ohm : $U_1 = R i_0$.

On en déduit la puissance reçue par G_1.

$$\boxed{\mathcal{P}_{1,o} = i_0 U_1 = R\left(\frac{E}{r + R}\right)^2}$$

8) Les deux guirlandes sont en dérivation. On peut les remplacer par une résistance équivalente $R_{eq} = \frac{R}{2}$.



La loi des mailles donne :

$$E = i_f\left(r + \frac{R}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_f = \frac{E}{r + \frac{R}{2}}}$$

9) On en déduit (avec $R_1 = R_2 = R$) :

$$\boxed{i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i_f = \frac{E}{2r + R}} \quad \text{et} \quad \boxed{i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i_f = \frac{E}{2r + R}}$$

10) Puissance électrique reçue par chaque guirlande : $\boxed{\mathcal{P}_{1,f} = \mathcal{P}_{2,f} = R\left(\frac{E}{2r+R}\right)^2}$

11) On a : $\mathcal{P}_{1,o} = R\left(\frac{E}{r+R}\right)^2 \neq \mathcal{P}_{1,f} = R\left(\frac{E}{2r+R}\right)^2$

La guirlande 1 va donc se mettre à clignoter, puissance la puissance lumineuse qu'elle émet varie périodiquement. Ce montage ne satisfait donc pas de cahier des charges.

12) Pour limiter cet effet, il faut que : $\boxed{r \ll R}$. Dans ce cas, où peut négliger r et il vient : $\boxed{\mathcal{P}_{1,o} \simeq \mathcal{P}_{1,f} \simeq R\left(\frac{E}{R}\right)^2 = \frac{E^2}{R}}$

Ce n'est pas le cas avec les valeurs données dans l'énoncé.

II.2 - Système amélioré

13) En régime stationnaire, la bobine est équivalente à un fil électrique. Le montage est donc équivalent à celui de la partie II.1.

14) Puisque le montage est équivalent à celui de la partie précédente, on sait que : $\boxed{i_1\left(\left(\frac{T}{2}\right)^-\right) = \frac{E}{r+R}}$

Le courant à travers une bobine étant toujours continu, on en déduit : $\boxed{i_1\left(\left(\frac{T}{2}\right)^+\right) = \frac{E}{r+R}}$

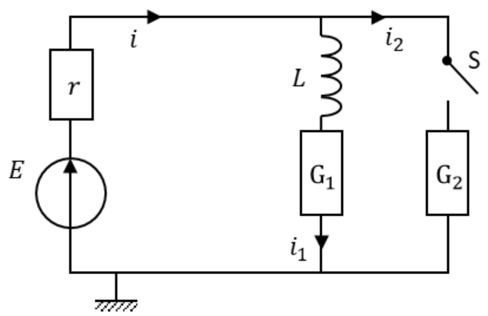
15) L'interrupteur étant ouvert, on a : $\boxed{i_2\left(\left(\frac{T}{2}\right)^-\right) = 0}$

Chercherons $i_2\left(\left(\frac{T}{2}\right)^+\right)$. La loi des mailles donne : $E = ri + Ri_2$

Avec la loi des nœuds : $E = r(i_1 + i_2) + Ri_2 \quad \Rightarrow \quad i_2 = \frac{E - ri_1}{r+R}$

On en déduit : $\boxed{i_2\left(\left(\frac{T}{2}\right)^+\right) = \frac{E - r\left(\frac{E}{r+R}\right)}{r+R} = E\,\frac{R}{(r+R)^2}}$

16)



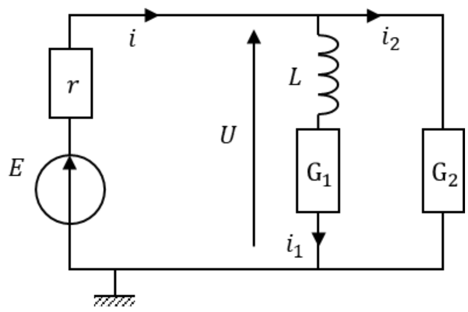
Loi des mailles :

$$E = ri_1 + L\frac{di_1}{dt} + Ri_1 = i_1(r+R) + L\frac{di_1}{dt}$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{di_1}{dt} + \frac{i_1}{\tau_o} = \frac{E}{L} \qquad avec \qquad \tau_o = \frac{L}{r+R}}$$

17)



Loi des mailles + loi des nœuds :

$$E = ri + Ri_1 + L\frac{di_1}{dt} = r(i_1 + i_2) + Ri_1 + L\frac{di_1}{dt}$$

De plus,

$$U = Ri_2 = Ri_1 + L\frac{di_1}{dt} \quad \Rightarrow \quad i_2 = i_1 + \frac{L}{R}\frac{di_1}{dt}$$

En combinant les deux équations, il vient :

$$\begin{aligned} E &= r\left(i_1 + i_1 + \frac{L}{R}\frac{di_1}{dt}\right) + Ri_1 + L\frac{di_1}{dt} \\ &= i_1(2r + R) + L\left(1 + \frac{r}{R}\right)\frac{di_1}{dt} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{di_1}{dt} + \frac{i_1}{\tau_f} = \frac{E}{L\left(1 + \frac{r}{R}\right)} \qquad \text{avec :} \qquad \tau_f = \frac{L\left(1 + \frac{r}{R}\right)}{2r + R}}$$

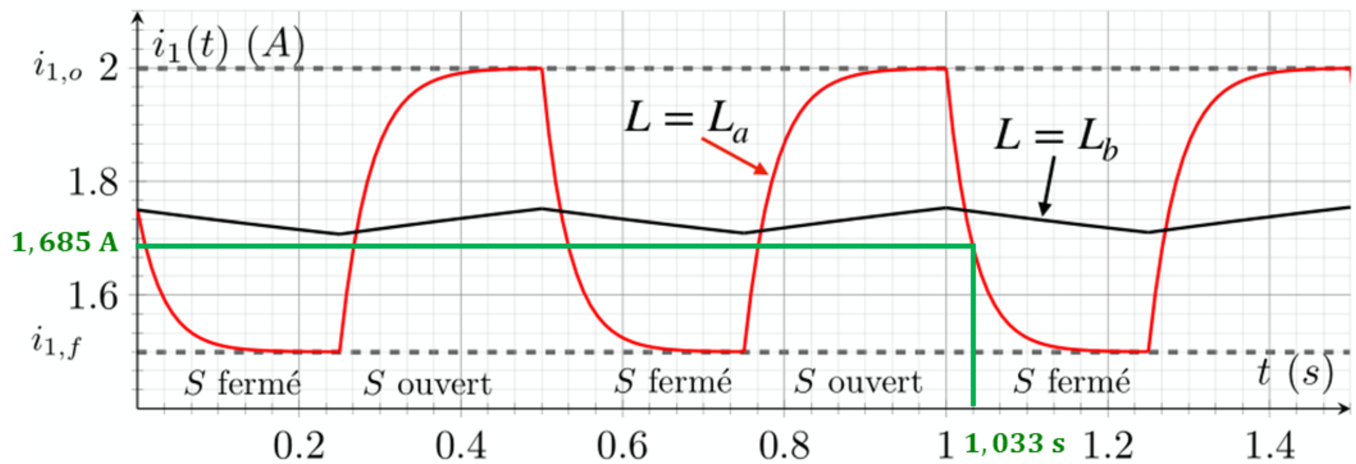
18) La forme générale de la solution de cette ED : $\boxed{i_1(t) = A\exp\left(-\frac{t}{\tau_f}\right) + \frac{\mathrm{E}}{2r+R}}$

Avec A une constante.

19) Il s'agit de la bobine L_a (la charge de la bobine a le temps de se faire entièrement).

20) Le temps τ_f correspond au temps nécessaire pour réaliser 63 % de la décharge de la bobine.

Prenons le point de bascule en $t = 1$ s. L'intensité va passer d'une valeur initiale de 2 A à une valeur finale de 1,5 A. Il s'agit d'une chute de 0,5 A. Or, $0{,}5 \times 0{,}63 = 0{,}315$. On cherche donc le moment au l'intensité à chuter de 0,315 A, c'est-à-dire le moment où $i = 1{,}685$ A.



Ainsi, $\boxed{\tau_f = 0{,}033 \text{ s} = 33 \text{ ms}}$

On en déduit : $\boxed{\mathrm{L_a} = \tau_f \frac{2r+R}{1+\frac{r}{R}} = 88 \text{ mH}}$

21) Le temps caractéristique du régime transitoire avec L_b est très supérieur devant celui avec L_a. Donc $\boxed{L_b \gg L_a}$.

22) Il s'agit de L_b, car l'intensité $i_1(t)$ ne varie presque pas (et il en va de même pour la tension U).

-- Fin de la partie II --